

Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale
A.A. 2022/2023

Esercitazione 2

Esercizio 1. Usando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \alpha x + \beta y = \alpha x_0 + \beta y_0 \quad \alpha, \beta, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 3x + (x-1)^2 \sin(x^2) + |y+1| \cos(y^2) = 3$$

Esercizio 2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^3}{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y + e^{|x|^7 + y^6 + \log 2} - 2}{x^2 + y^2}$$
$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^4 + y^4) + x^2 - x + y^2 + y}{x^2 + y^2}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x \log(y)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

Esercizio 3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x^2 - y}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2y^3)}{\sin(x^2 + y^6)}$$
$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} x$$
$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \frac{x+y}{x^2 + y^2}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{e^{y^2-2y} - e^{-1}}{\arctan(|x|) \sin(|y-1|)}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x-1)e^{\frac{x-1}{|y|}}$$

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^6}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{x^8y}}{x^8 + y^8}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} \frac{x^2y + \log(1 + |x|^{\frac{3}{2}} + y^2) - 5x^2}{\sqrt{x^2 + (y-5)^2}}$$

Esercizio 5. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x-y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \log(1+|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 5 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2\sqrt{x}y^2 + 3x^2 + 3y^2e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 6. Studiare la continuità della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2-y^2} & \text{se } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 7. Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(|x|^\alpha)y^{\frac{5}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esercizio 8. Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy|^\alpha \frac{1 - \cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$